4.7) $A = \begin{bmatrix} 2\alpha+4 & 1-\alpha & -2\alpha-\alpha^2 \\ 0 & 4-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 \end{bmatrix}$

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-(2\alpha+4) & \alpha-1 & 2\alpha+\alpha^2 \\ 0 & \lambda-(4-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-(4-\alpha^2) \end{bmatrix}\right) =$

$= [\lambda-(2\alpha+4)] \cdot [\lambda-(4-\alpha)] \cdot [\lambda-(4-\alpha^2)]$

Autoval. $\to P(\lambda) = 0$

$\to \begin{cases} \lambda_1 = 2\alpha+4 \\ \lambda_2 = 4-\alpha \\ \lambda_3 = 4-\alpha^2 \end{cases}$

Veo cuándo hay λ iguales:

Para λ_1 y λ_2:

$2\alpha+4 = 4-\alpha \to 3\alpha = 0 \to \boxed{\alpha = 0}$

Para λ_1 y λ_3:

$2\alpha+4 = 4-\alpha^2 \to \alpha^2+2\alpha = 0 \to \alpha.(\alpha+2) = 0 \to \boxed{\alpha=0}, \boxed{\alpha=-2}$

Para λ_2 y λ_3:

$4-\alpha = 4-\alpha^2 \to \alpha^2-\alpha = 0 \to \alpha.(\alpha-1) = 0 \to \boxed{\alpha=0}, \boxed{\alpha=1}$

Si $\alpha \neq 0, \alpha \neq -2, \alpha \neq 1 \to$ ~~$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$~~

$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_1 \neq \lambda_3 \\ \lambda_2 \neq \lambda_3 \end{matrix}\right\} \to$ A es diagonalizable.

Tengo que analizar en $\alpha=0$, $\alpha=-2$, $\alpha=1$.

$\boxed{\text{Si } \alpha=0} \rightarrow A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Autoval: $\rightarrow \lambda_1=4$, $\rightarrow \lambda_2=4$, $\rightarrow \lambda_3=4$ mult. algebraica de $\lambda=4$ es 3.

La multiplicidad geométrica debe ser entonces $=3$ para que sea diagonalizable.

Para $\lambda=4$:

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $-y=0 \rightarrow y=0$

$\rightarrow \bar{x}=(x,0,z)=x.(1,0,0)+z.(0,0,1)$

Como me quedó la m. geom. $<3 \rightarrow$ No es diag. con $\alpha=0$.

$\boxed{\text{Si } \alpha=1} \rightarrow A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Autoval. $\rightarrow \begin{cases} \lambda_1=6 \\ \lambda_2=3 \\ \lambda_3=3 \end{cases}$ mult. alg. de $\lambda=3$ es 2 $\rightarrow$ su mult. geom. tendrá que ser $=2$.

Para $\lambda=3$:

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $-3x+3z=0 \rightarrow x=z$

$\rightarrow \bar{x}=(z;y;z)=y.(0;1;0)+z.(1;0;1)$

AUTOVECT. $\lambda=3$: $\{(0;1;0),(1;0;1)\}$. m. geom. $=2$ ✓ $\rightarrow$ es diag. en $\alpha=1$

$\boxed{\text{Si } \alpha=-2} \to A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Autoval. $\to \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 6 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\lambda=0$ mult. alg. $= 2$

$\to$ su mult. geom. tiene que ser $\underline{\underline{2}}$.

Para $\lambda=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_2 \to 2F_1 - F_2 \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$-3y = 0 \to y = 0$

$\to \bar{X} = (x, 0, z)$

$= \underbrace{x.(1,0,0) + z.(0,0,1)}_{\text{Mult. geom.} = 2 \checkmark}$

es diag. en $\alpha=-2$

Entonces, finalmente:

$\boxed{A \text{ es diagonalizable } \forall \alpha \neq 0}$.

6) Para $\alpha = 1$.

$$\boxed{\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

busco autovect. para $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \bar{X} = (x,0,0) = x.(1,0,0)$$

AUTOVECT. $\lambda = 6$: $\{(1,0,0)\}$.

$$\to \boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Para $\alpha = 2 \rightarrow$ autoval. $\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 8 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

IDEM ANTERIOR BUSCANDO AUTOVECTORES PARA CADA λ.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$